

# Programmation mathématique et modélisation énergétique Mathematical programming and energy modelling

Jacqueline Boucher et Yves Smeers

Volume 61, numéro 1, mars 1985

URI : <https://id.erudit.org/iderudit/601320ar>

DOI : <https://doi.org/10.7202/601320ar>

[Aller au sommaire du numéro](#)

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)

1710-3991 (numérique)

[Découvrir la revue](#)

Citer cet article

Boucher, J. & Smeers, Y. (1985). Programmation mathématique et modélisation énergétique. *L'Actualité économique*, 61(1), 24–50.  
<https://doi.org/10.7202/601320ar>

Résumé de l'article

Nous examinons les possibilités d'utilisation des modèles d'optimisation de flux énergétiques dans des systèmes intégrés incluant des modèles de demande économétriques, d'optimisation ou de simulation. La discussion est conduite à partir des modèles MARKAL et EFOM.

## PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE ET MODÉLISATION ÉNERGÉTIQUE\*

Jacqueline BOUCHER  
et  
Yves SMEERS

Nous examinons les possibilités d'utilisation des modèles d'optimisation de flux énergétiques dans des systèmes intégrés incluant des modèles de demande économétriques, d'optimisation ou de simulation. La discussion est conduite à partir des modèles MARKAL et EFOM.

*Mathematical programming and energy modelling.* — We consider the possibilities of using energy flows optimization models into integrated systems including econometric demand models, optimization models or simulation models. This question is conducted using models such as MARKAL and EFOM as examples.

---

### 1. INTRODUCTION

La modélisation énergétique et la programmation mathématique ont fait ensemble leurs premiers pas. C'est à la fin des années 50 que A. Manne [1963] construisit son modèle de gestion des raffineries qui allait immédiatement se révéler un test important pour les premiers logiciels d'optimisation (Orchard-Hays [1978]); à la même époque, « Électricité de France » (Massé et Gibrat [1957]) élaborait, dans le cadre de la programmation linéaire, les modèles de planification des équipements de production dont les successeurs sont, sous diverses formes, largement utilisés aujourd'hui. Ces premiers pas communs ne sont pas restés sans suite et la modélisation, à l'intérieur des secteurs énergétiques, a toujours largement alimenté divers domaines de la programmation mathématique en problèmes test. Les années qui ont suivi le premier choc pétrolier ont vu l'apparition d'une nouvelle classe de modèles énergétiques. Alors que l'accent avait surtout été mis jusque-là sur les outils

---

\* Texte présenté au séminaire MEDEE-MARKAL, École des Hautes Études Commerciales, Montréal, 27 octobre, 1983.

sectoriels répondant à des questions d'exploitation ou d'investissement ponctuelles, on a vu se développer à partir de 1973 une classe de modèles globaux considérant tout à la fois l'ensemble des producteurs et transformateurs d'énergie et une part plus ou moins importante de ses consommateurs. Bien que souvent formulés selon les mêmes principes que les modèles sectoriels, ces outils apparaissent avec un rôle différent : construits par des organismes plus ou moins indépendants des secteurs, ils fournissent une image globale du rôle des divers vecteurs énergétiques dans l'économie plutôt que d'aider directement à des prises de décision ponctuelles. Leur manque de finesse dans la représentation des secteurs, conséquence directe de leur prétention à la globalité, les empêcherait d'ailleurs bien souvent d'entrer en concurrence directe avec les outils de ces derniers. Plutôt que d'aider à l'analyse fine d'un projet, leur intérêt réside dans la représentation des interactions au niveau de la production et de la consommation d'énergie qu'ils permettent. En ce sens, ils ont pour objectif d'éclairer plusieurs des questions qui se sont posées après 1973, tel le rôle possible des nouvelles technologies, des économies d'énergie ou des substitutions entre vecteurs énergétiques.

Parmi les nombreux outils d'analyse développés après 1973, les modèles de flux énergétiques jouent sans doute un rôle particulier du fait qu'ils se basent sur des descriptions du système énergétique très semblables à celles utilisées dans les secteurs et qu'ils relèvent de méthodologies connues et éprouvées. Ils sont d'une certaine manière des standards de modélisation : MARKAL (Abilock et al [1980]) qui est au centre de notre préoccupation dans ce texte est utilisé dans 14 pays de l'Agence Internationale de l'Énergie ; EFOM (Van der Voort [1982]), un modèle voisin construit à la Commission des Communautés Européennes est exploité dans les 10 pays membres ainsi qu'au Portugal et en Espagne. Enfin, étant formulés comme des problèmes de programmation linéaire, ces modèles se basent sur des logiciels puissants et robustes qui sont accessibles commercialement à travers le monde.

Malgré ces différents avantages, les modèles de flux énergétiques ne suffisent pas nécessairement à l'analyse de la politique énergétique. Le gouvernement du Québec dans son approche des questions énergétiques projette d'utiliser à la fois MARKAL et le modèle de demande MEDEE (IEJE [1982]). La Commission des Communautés Européennes suit la même approche et, dans ses analyses à long terme (DG XII), se base également sur un modèle de flux énergétiques (EFOM) et sur MEDEE. Enfin les études de l'A.I.E. utilisent tantôt MARKAL (IEA ETSAP [1984]), tantôt des modèles économétriques de la demande (IEA [1982]). L'interaction entre ces différents types de représentation a fait l'objet de nombreux travaux organisés autour de modèles particuliers et donc difficiles à appréhender de manière globale. Les techniques développées

à l'occasion des modèles énergétiques sont utilisables dans d'autres domaines et leur transposition bénéficierait certainement d'une présentation unifiée. Ceci est d'autant plus vrai que leurs mises en oeuvre requièrent en général des développements de logiciels particuliers organisés à partir d'outils plus classiques de programmation mathématique. L'identification de besoins communs à plusieurs de ces méthodes tirerait parti de l'expérience acquise dans ces programmes sophistiqués et permettrait un développement plus efficace de ces logiciels avec entre autres des possibilités d'accès plus flexibles aux différentes composantes des optimiseurs existant sur le marché. Enfin, les intérêts intellectuels des modélisateurs et des constructeurs d'algorithmes se trouveraient sans doute favorisés par une présentation évitant les détails de l'un et l'autre aspect.

C'est l'objectif de ce texte de fournir une synthèse des techniques de couplage mises en oeuvre en se référant aussi peu que possible aux détails particuliers des modèles sur lesquels elles se basent. Le support de la discussion est fourni par MARKAL dont nous n'utilisons cependant que certaines caractéristiques partagées par la plupart des modèles de flux énergétiques. Nous espérons ainsi rester suffisamment proches de la réalisation concrète sans pour autant nous encombrer de détails particuliers à un outil spécifique.

Le texte est organisé comme suit : la section 2 rappelle quelques caractéristiques principales de MARKAL et en introduit deux versions particulières sur lesquelles le reste de la discussion est articulé. La première version se prête au couplage avec des modèles de demande d'énergie finale dans le cadre d'un équilibre partiel ; ce point est traité à la section 3. La deuxième version de MARKAL, introduite dans la section 2, mène directement à des modèles d'équilibre général qui sont discutés en section 4.

## 2. MARKAL : CARACTÉRISTIQUES GÉNÉRALES — DEUX VERSIONS PARTICULIÈRES

Le type d'élasticité pris en compte dans la représentation de la demande énergétique finale est une des caractéristiques essentielles des modèles de flux énergétiques. Nous rappelons ici qu'on entend par demande finale d'énergie, celle qui s'exprime en combustibles énergétiques particuliers comme l'électricité, le gaz, les distillats moyens, . . . ; la demande d'énergie utile traduit quant à elle la demande de service fourni par l'énergie. Nous considérons trois types de modèles selon que la demande d'énergie finale  $y$  est exogène, dépend des prix uniquement ou est fonction à la fois des prix et du revenu. MARKAL part d'une demande d'énergie utile exogène mais permet des substitutions de technologie au niveau de la satisfaction de celle-ci ; la demande d'énergie finale  $y$  dépend donc uniquement des prix. Nous introduisons dans cette section deux

nouvelles versions de MARKAL ; la demande d'énergie finale est exogène dans la première d'entre elles, elle dépend à la fois des prix et du revenu dans la seconde.

MARKAL est formulé comme un modèle de l'ensemble du système énergétique allant des activités d'extraction d'énergie primaire à celles de consommation d'énergie utile. Une description détaillée peut en être trouvée dans Abilock et al [1981] ou dans le manuel d'utilisation. Les quelques éléments qui suivent sont rappelés pour faciliter la discussion.

MARKAL subdivise l'ensemble du système énergétique en quatre ensembles principaux d'activité : la mise à disponibilité d'énergie primaire (SRC) (extraction, importation, exportation, mise en stock et prélèvement à partir des stocks), les procédés (PRC) de transformation d'une forme d'énergie en une autre, les installations de production (CON) de chaleur et / ou d'électricité et les activités de demande (DMD). Il considère également deux grandes classes de vecteurs énergétiques, à savoir ceux dont la demande est variable dans l'année (dans ce cas la chaleur et l'électricité) et les autres. Le modèle est alors formulé comme un programme linéaire à plusieurs périodes dans lequel la demande d'énergie utile est exogène. De manière générale et sans entrer ici dans une quelconque analyse de ses variables et contraintes, le modèle se présente sous la forme :

$$\text{Min } cx \quad (1)$$

$$\text{s.c.q.} \quad Ax = b \quad (2)$$

$$x \geq 0. \quad (3)$$

Considérons alors un partitionnement de l'ensemble des activités du système énergétique en production et transformation d'une part, consommation de l'autre. Les sources (SRC), procédés (PRC) et conversions (CON) constituent ainsi le premier sous-ensemble, les activités de demande (DMD) le second. Si nous désignons par  $x_1$  et  $x_2$  les vecteurs relatifs à ces deux classes d'activité, la matrice des contraintes peut être partitionnée en sous-matrices

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \\ 0 & A_{32} \end{pmatrix}$$

- où :
- $(A_{11} \quad 0)$  est l'ensemble des contraintes qui n'impliquent que des activités de production et transformation ;
  - $(0 \quad A_{32})$  est l'ensemble des contraintes qui n'impliquent que des activités de consommation ;
  - $(A_{21} \quad A_{22})$  est l'ensemble des autres contraintes.

Le modèle MARKAL peut ainsi s'écrire

$$\text{Min } c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad (4)$$

$$\text{s.c.q.} \quad A_{11} x_1 = b_1 \quad (5)$$

$$A_{21} x_1 + A_{22} x_2 = b_2 \quad (6)$$

$$A_{32} x_2 = b_3 \quad (7)$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0. \quad (8)$$

Il est utile, pour interpréter ce partitionnement, de brièvement passer en revue la structure MARKAL. Le modèle est constitué essentiellement de contraintes exprimant des conservations de matières (production et consommation d'énergie en chaque période, évolution de stocks d'énergie primaire ou de matières fissiles ou fertiles sur plusieurs périodes . . .), de relations liant des variables d'exploitation d'une technologie (PRC, CON ou DMD) à sa capacité et enfin de contraintes techniques permettant d'arriver à une représentation satisfaisante des procédés (PRC) et des équipements de production de chaleur et/ou d'électricité (CON). Les contraintes liant  $x_1$  et  $x_2$  sont dès lors uniquement constituées de relations de livraison des activités de production et de transformation aux activités de consommation. Il est ainsi aisé de construire une version de MARKAL où la demande d'énergie finale est exogène. Supposons un mode de fonctionnement réalisable du secteur consommateur ; celui-ci est représenté par un vecteur  $\bar{x}_2$  qui satisfait

$$\bar{x}_2 \geq 0 \text{ et } A_{32} \bar{x}_2 = b_2.$$

La version cherchée de MARKAL s'écrit

$$\text{Min } c_1 x_1 \quad (9)$$

$$\text{s.c.q.} \quad A_{11} x_1 = b_1 \quad (10)$$

$$A_{21} x_1 = b_2 - A_{22} \bar{x}_2 \quad (11)$$

$$x_1 \geq 0. \quad (12)$$

Ce modèle reprend essentiellement la description des sources, procédés et moyens de conversion. Nous nous y référons dans la suite comme le modèle MARKAL-PRODUCTION.

La construction d'un MARKAL avec demande d'énergie finale dépendant du revenu est plus complexe et requiert des notations supplémentaires. Partant de MARKAL-PRODUCTION, nous partitionnons le vecteur  $x_1$  des activités selon les secteurs énergétiques dont elles relèvent. Si  $E$  dénote l'ensemble de ceux-ci,  $x_1$  est décomposé en  $\{x_{1i}, i \in E\}$  où  $x_{1i}$  désigne les activités du secteur  $i$  ainsi que les variables de livraison d'énergie de  $i$  aux autres secteurs énergétiques ou à la demande finale. Il est à noter que ces partitionnements ne sont pas naturels à MARKAL et

peuvent même demander l'introduction de nouvelles variables (par exemple pour calculer la livraison totale d'une forme d'énergie par un secteur). Nous reviendrons brièvement sur ce point plus loin. MARKAL, étant un modèle multitemporel, contient à la fois des variables représentant l'exploitation et les investissements en chaque procédé. Soit  $x_{1i}^o$  et  $x_{1i}^I$  respectivement les vecteurs des composantes de  $x_{1i}$  décrivant l'exploitation et les investissements dans le secteur  $i$ . Nous supposons que ces variables existent non seulement pour les procédés et activités de conversion (ce qui est le cas), mais également pour l'extraction que MARKAL représente actuellement sans capacité de production. Comme mentionné auparavant, la prise en compte de ces notions requiert des modifications au logiciel de génération du modèle : le concept du secteur énergétique n'est pas naturel à MARKAL ; son introduction peut cependant se faire à peu de frais en complétant les données par des classes regroupant les activités de chaque secteur. La définition des variables de livraison est plus compliquée : elle demande l'introduction dans le modèle de relations faisant le bilan de toutes livraisons de chaque secteur par forme d'énergie. Enfin, l'utilisation de variables de capacité pour l'extraction implique une modification (très légère) de la représentation du système énergétique qui peut se traduire par quelques changements dans le comportement du modèle. Nous ne discuterons pas plus longuement ce sujet et supposerons par la suite que MARKAL-PRODUCTION permet le recours aux variables  $x_{1i}^o$  et  $x_{1i}^I$ .

Considérons un modèle économique multisectoriel écrit schématiquement comme suit :

$$\text{Max } U(c) \quad (13)$$

$$\text{s.c.q. } Dc + Vv - Ay - m + e \leq \hat{w} \quad (14)$$

$$- Kv + y \leq \hat{k} \quad (15)$$

$$\text{autres contraintes} \quad (16)$$

où  $y$  désigne le vecteur des niveaux d'activité des différents secteurs de l'économie,

$A$  est la matrice entrée-sortie relative à ces secteurs,

$\hat{w}$  est un vecteur de ressources exogènes,

$K$  est une matrice de « capital output ratio », capital par unité de valeur ajoutée,

$\hat{k}$  est le stock initial de capital.

Comme pour la description de MARKAL, nous négligeons ici, afin de simplifier les notations, toute référence explicite à l'aspect intertemporel du problème. L'interprétation des relations du modèle est immédiate :  $U(c)$  est une fonction d'utilité intertemporelle qui dépend de la consommation finale  $c$ . Dans les contraintes (14) de bilan matières,  $Dc$  et  $Vv$

représentent respectivement la demande due à la consommation finale et aux investissements ;  $A_y$  est la production nette,  $m$  et  $e$  sont respectivement les importations et exportations. La contrainte (15) lie les activités dans l'économie aux investissements passés, toutes les autres contraintes sont résumées sous (16). Il n'est sans doute pas opportun de discuter longuement ici les interprétations économiques sous-tendant ce type de représentation et nous nous contenterons pour cette section de noter que le modèle est considéré comme décrivant un équilibre général multitemporal ;  $U(c)$  est alors la fonction d'utilité d'un consommateur rationnel unique.

L'introduction, dans MARKAL, d'une demande d'énergie finale dépendant du revenu peut se faire en couplant MARKAL-PRODUCTION (nous ne discutons pas ici le couplage d'autres versions de MARKAL) avec le modèle économique multisectoriel. Celui-ci détermine en effet l'évolution du PNB en chaque année et sa répartition entre consommation privée et investissement ; MARKAL-PRODUCTION, en choisissant les niveaux d'activité et d'investissement dans les secteurs énergétiques, détermine également les coûts marginaux des différents vecteurs mis sur le marché. Le couplage des deux modèles mène à une demande d'énergie finale dépendant à la fois du revenu et des prix. Il se fait selon trois principes que nous énonçons avant d'en discuter l'application.

Désignons comme précédemment par  $E$  l'ensemble des secteurs énergétiques de MARKAL-PRODUCTION. Nous partitionnons l'ensemble des secteurs du modèle économique en énergétiques et non énergétiques et supposons que l'ensemble des activités d'un secteur énergétique dans MARKAL-PRODUCTION correspond à la définition de celui-ci dans le modèle économique. Cette hypothèse, commode pour la suite de l'exposé, n'est pas sans imposer d'éventuelles modifications aux modèles : le secteur des mines dans l'économie comprendra souvent d'autres activités que l'extraction de combustibles énergétiques ; satisfaire l'hypothèse demande de désagréger le secteur mine du modèle économique de manière à arriver à un sous-secteur recouvrant exactement une classe d'activités de MARKAL-PRODUCTION. Nous pouvons maintenant énoncer les principes permettant de réaliser la liaison entre les modèles.

#### *Principes de couplage*

(i) La formation brute de capital d'un secteur énergétique dans le modèle économique est obtenue en agrégeant les investissements de ce secteur dans MARKAL-PRODUCTION. L'évolution du stock de capital est celle décrite dans MARKAL-PRODUCTION.

(ii) Le niveau d'activité d'un secteur énergétique dans le modèle économique est obtenu à partir des variables d'activité et de livraison de ce secteur dans MARKAL-PRODUCTION.



(iii) La demande en provenance de la partie non énergétique de l'économie pour les produits d'un secteur énergétique tels que représentés dans MARKAL-PRODUCTION s'obtient en désagrégeant la demande correspondante du modèle économique.

Pour examiner l'application de ces principes, considérons une partition des lignes et colonnes des contraintes (14) et (15) en composantes énergétiques et non énergétiques ; nous supposons sans restriction réelle que  $V$  n'a pas de lignes énergétiques et notons par  $A_{a,b}$  la sous-matrice de  $A$  obtenue comme l'intersection des ensembles  $a$  et  $b$  de lignes et colonnes ; si  $a$  ou  $b$  est l'ensemble de toutes les lignes ou colonnes, il est désigné par « · ».

$$D_{NE,\cdot} c + V_{NE,NE} v_{NE} + V_{NE,E} v_E - A_{NE,NE} y_{NE} - A_{NE,E} y_E - m_{NE} + e_{NE} \leq \hat{w}_{NE} \quad (14')$$

$$D_{E,\cdot} c - A_{E,NE} y_{NE} - A_{E,E} y_E - m_E + e_E \leq \hat{w}_E \quad (14'')$$

$$- K_{NE,NE} v_{NE} + y_{NE} \leq \hat{k}_{NE} \quad (15')$$

$$- K_{E,E} v_E + y_E \leq \hat{k}_E \quad (15'')$$

L'application du principe (i) conduit à l'élimination complète des contraintes (15'') : les liaisons entre les variables d'exploitation et de capacité dans les secteurs énergétiques sont en effet entièrement prises en compte dans MARKAL-PRODUCTION. La formation brute de capital dans le secteur énergétique  $i$  résulte par ailleurs des investissements réalisés dans celui-ci, ce qui s'exprime comme

$$v_i = \alpha_i x_{1i}^I \quad i \in E, \quad (17)$$

où  $\alpha_i$  est un vecteur convertissant les unités physiques de MARKAL dans celles du modèle économique.

Considérons maintenant l'application du deuxième principe de liaison. Le niveau d'activité  $y_i$  d'un secteur énergétique s'obtient à partir des activités et livraisons de ce secteur dans MARKAL-PRODUCTION. On a donc

$$y_i = \beta_i x_{1i}^o, \quad i \in E, \quad (18)$$

où  $\beta_i$  sélectionne les activités pertinentes à la construction de  $y_i$  (par exemple uniquement les livraisons) et effectue les transformations d'unité. Puisque la consommation due à l'ensemble des secteurs énergétiques est explicitement prise en compte dans MARKAL-PRODUCTION, le terme  $A_{E,E} y_E$  peut être éliminé de (14''). Par ailleurs les variables  $m_E$  et  $e_E$  disparaissent également pour laisser la place à des variables d'importation et d'exportation (variables de SRC) plus fines dans MARKAL-PRODUCTION. Ayant effectué ces transformations, (14'') exprime la

demande d'énergie finale des secteurs non énergétiques de l'économie soit

$$Z_E = D_{E,\cdot} c - A_{E,NE} y_{NE} - \hat{w}_E. \quad (19)$$

Le troisième principe de couplage ventile la demande d'énergie finale du modèle économique dans celle de MARKAL-PRODUCTION. Plusieurs approches sont possibles selon l'information disponible ; nous supposons ici la situation la plus favorable où la consommation énergétique peut être ventilée par secteur industriel ou poste de consommation. Si  $\tilde{E}$  désigne l'ensemble des biens apparaissant dans la demande finale de MARKAL-PRODUCTION et si nous supposons qu'il existe des matrices  $D_{\tilde{E},\cdot}$  et  $A_{\tilde{E},NE}$  donnant la demande d'énergie finale résultant de  $c$  et  $y_{NE}$  ainsi que des ressources initiales  $\hat{w}_{\tilde{E}}$ , la demande d'énergie finale de MARKAL-PRODUCTION est alors

$$Z_{\tilde{E}} = D_{\tilde{E},\cdot} c - A_{\tilde{E},NE} y_{NE} - \hat{w}_{\tilde{E}}. \quad (20)$$

Nous nous référons dans la suite au modèle couplé comme à MARKAL-ÉCONOMIE.

### 3. COUPLAGE MARKAL PRODUCTION — MODÈLE DE DEMANDE

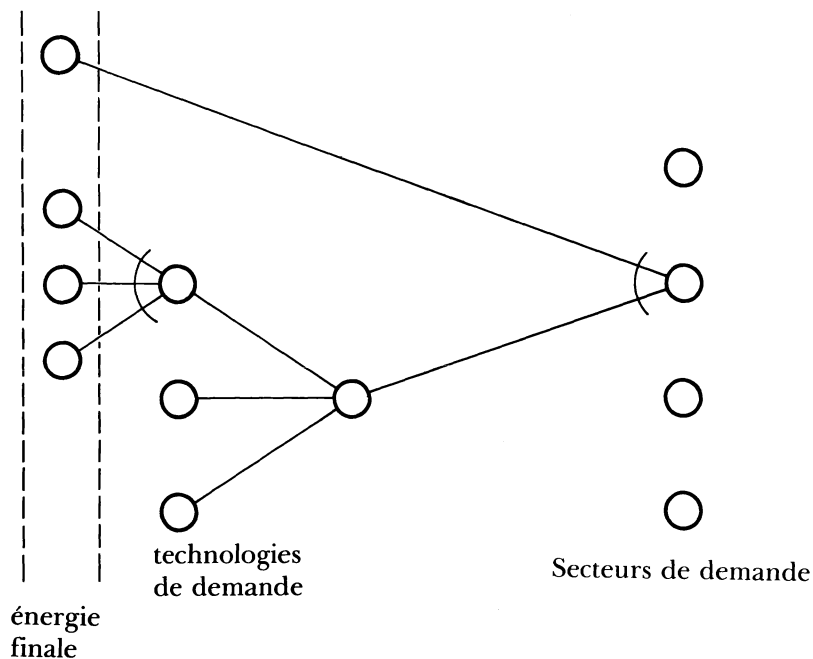
La demande, dans MARKAL, est spécifiée en énergie utile. Pour passer à l'énergie finale, le modèle choisit les technologies de consommation (DMD) permettant de satisfaire les services énergétiques au moindre coût. Le calcul de la demande d'énergie finale dépend donc à la fois de la modélisation plus ou moins fine des consommateurs et du calcul des prix des combustibles qui leur sont vendus. On peut envisager plusieurs extensions possibles de la représentation actuelle de la demande dans MARKAL qui mènent à des formulations plus ou moins différentes du modèle. C'est à ces extensions que la section est consacrée.

La figure 1 donne un schéma de la description de la consommation d'énergie dans MARKAL.

La demande est ventilée en un certain nombre de secteurs pour lesquels on donne les besoins en énergie utile ; une fraction de celle-ci est spécifique, c'est-à-dire qu'elle se traduit directement en combustibles particuliers. Le reste peut être alimenté par plusieurs technologies qui, chacune, font appel à un ensemble de combustibles dans des proportions données. La concurrence entre les technologies de demande se fait au niveau des coûts d'investissement et d'exploitation (y compris les coûts de combustibles). Un exemple de cette modélisation est fourni par le chauffage des habitations unifamiliales représenté à la figure 2 : on y envisage différents procédés dont le chauffage électrique direct et à accumulation ainsi que les chauffages individuels au mazout et au gaz.

FIGURE 1

SCHÉMA DE LA REPRÉSENTATION DE LA DEMANDE DANS MARKAL



Les chauffages électriques se différencient par leur coût d'investissement et leur consommation d'électricité de jour et de nuit ; de manière générale, les modes de chauffage diffèrent par leurs coûts d'investissement et de fonctionnement. MARKAL détermine les coûts marginaux des différents combustibles à partir desquels se fait l'arbitrage entre procédés.

Il est possible d'examiner cette représentation de la demande par rapport au modèle MARKAL-PRODUCTION défini dans la section précédente : ceci est illustré à la figure 3.

FIGURE 2  
COMPÉTITION ENTRE DIVERS MODES DE CHAUFFAGE

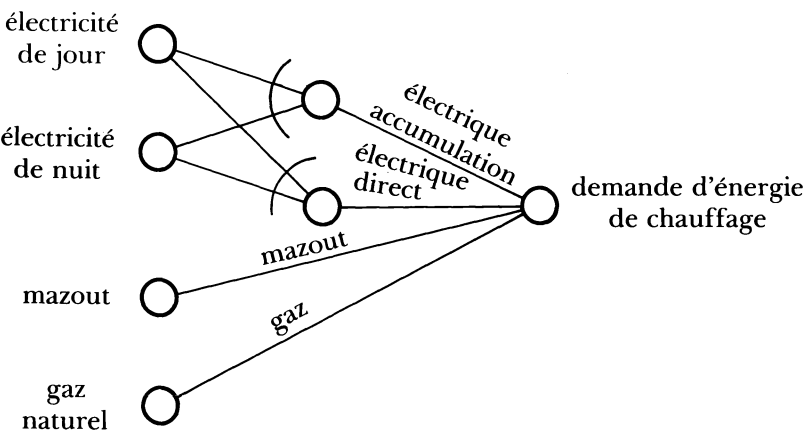
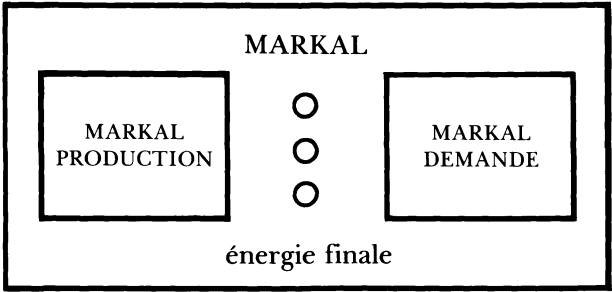


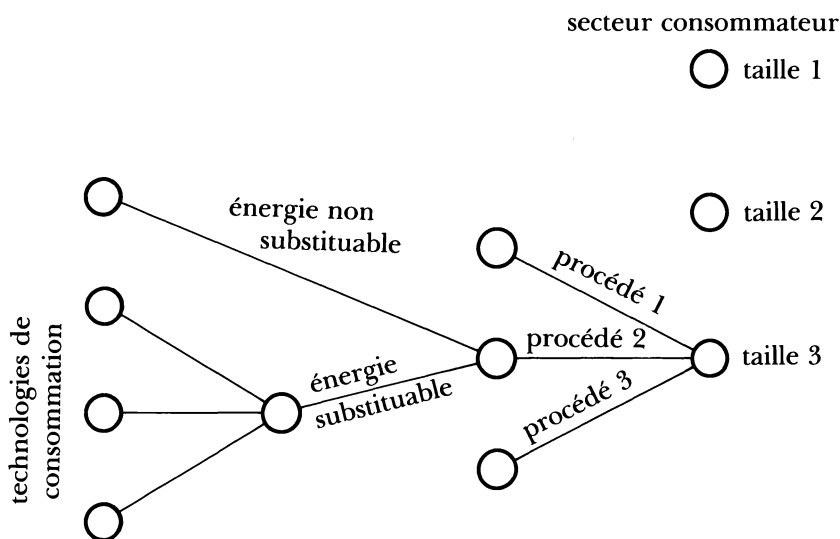
FIGURE 3  
DÉCOMPOSITION DE MARKAL EN PRODUCTION ET DEMANDE



Cette décomposition amène plusieurs remarques. On peut n'être guère satisfait de la description des technologies de demande adoptées dans MARKAL : le choix y est en effet essentiellement limité à la satisfaction de l'énergie utile et il n'est guère facile, dans le contexte du logiciel existant, de modéliser des phénomènes comme le choix de nouveaux procédés de fabrication, ou des contraintes propres aux technologies de consommation. Par ailleurs chaque secteur de demande est représenté par un ensemble d'équipements types, chacun de ceux-ci ayant une durée de vie, un coût d'investissement, un rendement propre. Cette description, si elle s'adapte bien au secteur énergétique où les équipements sont raisonnablement standardisés, n'est guère adéquate pour représenter les secteurs consommateurs où la taille des firmes influence directement, via les rendements d'échelle, les coûts des différentes unités. La parade à cette difficulté est simple en principe : il suffit de décrire plus finement les secteurs consommateurs en augmentant le nombre de procédés et en stratifiant chaque secteur selon la taille de ses entreprises. Le secteur consommateur est dans ce cas représenté schématiquement comme indiqué à la figure 4 ; celle-ci se distingue essentiellement de la figure 1 par le fait qu'on y a représenté explicitement une segmentation des secteurs consommateurs selon la taille des firmes après avoir introduit un niveau supplémentaire de substitution pour le choix des procédés techniques.

FIGURE 4

REPRÉSENTATION PLUS DÉSAGRÉGÉE DE LA DEMANDE



Nous ne pousserons pas plus loin l'investigation des aspects de modélisation de cette démarche : elle mène à un outil plus réaliste dans la mesure où les substitutions sont mieux représentées, la contrepartie est évidemment la taille du modèle auquel on arrive. C'est ce dernier point qui va maintenant retenir notre attention.

Quel que soit le niveau de désagrégation adopté pour représenter la demande, le modèle MARKAL ainsi étendu se présente toujours sous la forme

$$\text{Min } c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad (4)$$

$$\text{s.c.q.} \quad A_{11} x_1 = b_1 \quad (5)$$

$$A_{21} x_1 + A_{22} x_2 = b_2 \quad (6)$$

$$A_{32} x_2 = b_3 \quad (7)$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad (8)$$

introduite dans la section précédente ; le fait nouveau est maintenant la taille de la partie « consommateur » du modèle. Plusieurs approches, rigoureuses ou empiriques, permettent de tirer parti de la structure traduite par les relations (5) à (7) ; elles sont toutes basées sur une séparation du modèle en ses composantes MARKAL-PRODUCTION et reste du modèle que nous désignerons par MARKAL-DEMANDE. Considérons cette seconde partie du modèle où nous supposons connu le vecteur  $\Pi$  des prix des vecteurs énergétiques en chaque période de l'horizon. Le choix des secteurs consommateurs se fera en résolvant le problème

$$\text{Min } (c_2 - \Pi A_{22}) x_2 \quad (21)$$

$$\text{s.c.q.} \quad A_{32} x_2 = b_3 \quad (22)$$

$$x_2 \geq 0. \quad (23)$$

Si nous désignons respectivement par  $x_2(\Pi)$  et  $y(\Pi)$  la solution du problème et l'expression  $b_2 - A_{22} x_2(\Pi)$ , le modèle MARKAL peut être écrit comme suit : trouver  $\Pi$  et  $x_2(\Pi)$  tels que le vecteur des variables duales du deuxième bloc de contraintes (26) dans MARKAL-PRODUCTION

$$\text{Min } c_1 x_1 \quad (24)$$

$$\text{s.c.q.} \quad A_{11} x_1 = b_1 \quad (25)$$

$$A_{21} x_1 - y(\Pi) = 0 \quad (26)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (27)$$

soit égal à  $\Pi$ .

Avant d'examiner quelques alternatives de traitement de ce problème, il est intéressant de mentionner certains avantages de la décomposition.

À la différence de MARKAL-PRODUCTION qui se présente comme un bloc fortement intégré, MARKAL-DEMANDE se prête aisément à une décomposition en bloc. Le secteur consommateur d'un modèle de flux énergétiques se présente en effet comme un ensemble de sous-secteurs qui ne sont couplés entre eux que par des relations de conservation des vecteurs énergétiques. Dans la version de MARKAL-DEMANDE représentée par (21), (22) et (23), les secteurs consommateurs sont découplés les uns des autres et peuvent faire l'objet d'une optimisation séparée. La même décomposition peut être poursuivie si la représentation des secteurs est stratifiée en fonction de la taille des firmes : chaque partie d'un secteur correspondant à une certaine taille agit, en face de prix énergétiques  $\Pi$ , indépendamment des autres consommateurs. La demande  $y(\Pi)$  se présente ainsi comme une somme de demandes individuelles  $y^k(\Pi)$  correspondant à chacun des segments de secteur.

La formulation (24) à (27) de MARKAL se prête à d'autres interprétations :  $y(\Pi)$  ne doit pas nécessairement provenir d'un MARKAL-DEMANDE formulé comme problème d'optimisation mais peut résulter d'un modèle économétrique ou de simulation. Le problème posé est ainsi celui de l'interaction d'un système de demande  $y(\Pi)$  avec un modèle du type MARKAL-PRODUCTION. L'interaction peut être limitée au cas où  $\Pi$  est un vecteur de variables duales, elle peut aussi s'étendre à des situations où les prix sont calculés par des méthodes plus complexes. La fin de cette section est consacrée à quelques approches permettant de traiter ce problème. Deux cas sont considérés :  $y(\Pi)$  est établi à l'aide d'un modèle économétrique ou vient d'un problème d'optimisation. D'autres circonstances sont examinées plus loin.

#### A) $y(\Pi)$ dérive d'un modèle économétrique

On suppose dans ce cas que  $y(\Pi)$  est continûment différentiable et on distinguera deux sous-problèmes en fonction des propriétés d'intégrabilité de  $y(\Pi)$ .

##### A.1. $y(\Pi)$ est intégrable

Supposons que  $y(\Pi)$  soit également inversible et désignons par  $\Pi(y)$  son inverse.  $\Pi(y)$  est intégrable s'il existe une fonction  $U(y)$  telle que

$$\nabla U(y) = \Pi(y). \quad (28)$$

Cette propriété sera vérifiée lorsque les effets prix sont symétriques, c'est-à-dire

$$\frac{\partial y_i}{\partial \Pi_j} = \frac{\partial y_j}{\partial \Pi_i} \quad (29)$$

Coupler MARKAL-PRODUCTION au modèle de demande revient à traiter le modèle intégré

$$\text{Min } c_1 x_1 - U(y) \quad (30)$$

$$\text{s.c.q.} \quad A_{11} x_1 = b_1 \quad (31)$$

$$A_{21} x_1 - y = 0 \quad (32)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (33)$$

pour lequel les conditions d'optimalité correspondent aux conditions d'équilibre. Les avantages de cette approche sont évidents : d'une part, les conditions d'intégrabilité (symétrie des effets prix) sont souvent aisées à vérifier et d'autre part, le modèle peut être traité comme un programme non linéaire usuel. Cette approche a été mise en oeuvre dans divers modèles énergétiques (Kennedy [1974] et Manne [1976]).

#### A.2. $y(\Pi)$ n'est pas intégrable

Le cas le plus général est celui où la correspondance ne satisfait pas les conditions d'intégrabilité. Les causes en sont, soit la spécification du modèle de demande qui ne garantit pas des effets prix symétriques, soit le fait que ce dernier est établi pour un revenu constant (c'est le cas des modèles d'équilibre partiel) et ne satisfait pas normalement à ces propriétés (Ahn [1979]). Il faut alors recourir à des algorithmes spéciaux ; nous mentionnerons brièvement deux approches particulièrement attrayantes.

L'algorithme PIES remplace le problème formulé avec une correspondance  $y(\Pi)$  non intégrable par une suite de problèmes construits à partir de systèmes de demande approchés  $\hat{y}(\Pi)$  satisfaisant les propriétés d'intégrabilité. Ainsi, si  $\Pi^0$  désigne le vecteur de prix obtenu à un certain stade de l'algorithme, le système approché  $\hat{y}(\Pi, \Pi^0)$  est défini par

$$\hat{y}_i(\Pi, \Pi^0) = y_i(\Pi_1^0, \dots, \Pi_{i-1}^0, \Pi_i, \Pi_{i+1}^0, \dots, \Pi_n^0) \quad (34)$$

Les effets prix croisés  $y$  sont nuls et satisfont donc trivialement les propriétés de symétrie.

L'algorithme du PIES est alors défini en considérant le problème d'équilibre approché

$$\text{Min } c_1 x_1 - \hat{U}(y) \quad (35)$$

$$\text{s.c.q.} \quad A_{11} x_1 = b_1 \quad (36)$$

$$A_{21} x_1 - y = 0 \quad (37)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (38)$$

où  $\hat{U}(y)$  est la fonction de surplus calculée par la correspondance  $y(\Pi)$ . L'algorithme s'énonce comme suit : partant d'un problème approché



donné, trouver les variables duales  $\tilde{\Pi}$  des contraintes (37) et la demande correspondante  $y(\tilde{\Pi})$ . Calculer la correspondance  $\hat{y}(\Pi, \tilde{\Pi})$  approchée et définir un nouveau problème d'équilibre.

Les conditions de convergence de cet algorithme ont été étudiées en détail dans Ahn [1979]. Des résultats globaux existent pour le cas de systèmes de demande linéaires et des conditions de convergence locale sont disponibles dans le cas de demande non linéaire. La méthode a été utilisée abondamment dans les travaux du DOE [1979] dans le cas de modèles statiques et étendue au cas dynamique dans le modèle BALANCE (Daniel et Goldberg [1981]). Un de ses avantages est de se prêter à une mise en oeuvre basée sur des logiciels existants de programmation linéaire.

Le principe fondamental de l'algorithme du PIES est de se ramener à un système de demande intégrable en négligeant à chaque cycle les effets prix croisés. Les systèmes de demande linéaires

$$y(\Pi) = d - D\Pi \quad (39)$$

se prêtent à des calculs d'équilibre qui ne requièrent pas des simplifications aussi drastiques mais demandent la résolution d'un problème complémentaire linéaire. Une approche naturelle du problème d'équilibre est donc de la reformuler comme un problème complémentaire non linéaire que l'on traite par une suite de problèmes complémentaires linéaires. Cette approche, introduite par Mathiesen, a été explorée numériquement par Preckel [1983]. Son principe est le suivant. En vue de reformuler le problème du couplage MARKAL-PRODUCTION avec le système de demande, considérons le programme complémentaire suivant :

trouver  $(x_1, u, \Pi)$  tel que

$$x_1 \geq 0 \quad (40)$$

$$c_1 - u A_{11} - \Pi A_{21} \geq 0 \quad (41)$$

$$c_1 x_1 - u A_{11} x_1 - \Pi A_{21} x_1 = 0 \quad (42)$$

$$b_1 - A_{11} x_1 = 0 \quad (43)$$

$$b_2 - A_{21} x_1 - y(\Pi) = 0. \quad (44)$$

Si  $\tilde{\Pi}$  est le vecteur de prix trouvé à un certain stade de l'algorithme, on définit le système de demande approché

$$\begin{aligned} \hat{y}(\Pi) &= y(\tilde{\Pi}) + \left( \frac{\partial y}{\partial \Pi} \right)_{\tilde{\Pi}} (\Pi - \tilde{\Pi}) \\ &= d - D\Pi. \end{aligned}$$

Le problème complémentaire linéaire approximant le problème d'équilibre est obtenu en remplaçant (44) par

$$(b_2 - d) - A_{21} x_1 + D\Pi = 0. \quad (44')$$

B)  $y(\Pi)$  est obtenu à partir d'un modèle d'optimisation

Nous référant au couplage de MARKAL-PRODUCTION et d'un MARKAL-DEMANDE plus ou moins développé,  $y(\Pi)$  est obtenu comme solution du problème

$$\text{Min } (c_2 - \Pi A_{22}) x_2 \quad (45)$$

$$A_{22} x_2 - y = 0 \quad (46)$$

$$\text{s.c.q.} \quad A_{32} x_2 = b_3 \quad (47)$$

$$x_2 \geq 0. \quad (48)$$

La correspondance  $y(\Pi)$  est constante par morceaux : l'espace des vecteurs  $\Pi$  est partitionné en un ensemble de régions où la base optimale du problème (45) – (46) – (47) – (48) reste constante. Il semble évidemment naturel dans ce cas, d'établir une procédure itérative entre MARKAL-PRODUCTION et le MARKAL-DEMANDE modifié ((45) – (46) – (47) – (48)). Ceci a été proposé par Wagner [1981] pour décomposer le National Coal Model (ICF [1976]). L'algorithme est le suivant. Si  $\tilde{\Pi}$  est le vecteur obtenu à une certaine itération et  $y(\tilde{\Pi})$  la demande correspondante, on résout MARKAL-PRODUCTION pour trouver le coût minimum de satisfaction de  $y(\tilde{\Pi})$ , c'est-à-dire

$$\text{Min } c_1 x_1 \quad (49)$$

$$\text{s.c.q.} \quad A_{11} x_1 = b_1 \quad (50)$$

$$A_{21} x_1 = y(\tilde{\Pi}) \quad (51)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (52)$$

soit  $\bar{\Pi}$  le vecteur des variables duales de (51) ; le nouveau prix est choisi comme

$$\Pi^* = \lambda \tilde{\Pi} + (1 - \lambda) \bar{\Pi} \quad (53)$$

où  $\lambda$  est compris entre 0 et 1.

La solution du problème fournie par l'algorithme est obtenue en concaténant des solutions de base dans MARKAL-PRODUCTION et MARKAL-DEMANDE. Il s'agit là d'une base particulière du modèle MARKAL complet qui peut donc ne pas être optimale. La procédure doit donc être considérée comme une méthode heuristique permettant de trouver une (très) bonne solution de départ pour le simplex révisé habituel ou pour une approche de décomposition. Nous considérons brièvement ce second cas.

Soit  $\{\Pi^k, k = 1, \dots, K\}$  un ensemble de vecteurs prix trouvés lors d'une procédure itérative quelconque entre MARKAL-PRODUCTION et MARKAL-DEMANDE ; soit  $x_2^k$  les vecteurs de demande correspondants. Il est possible d'initialiser une procédure convergente de résolution du modèle MARKAL complet par le MARKAL-PRODUCTION modifié suivant

$$\text{Min } c_1 x_1 + \sum_{k \in K} (c_2 x_2^k) \lambda_k \quad (54)$$

$$\text{s.c.q.} \quad A_{11} x_1 = b_1 \quad (55)$$

$$A_{21} x_1 + \sum_{k \in K} (A_{22} x_2^k) \lambda_k = b_2 \quad (56)$$

$$\sum_{k \in K} \lambda_k = 1 \quad (57)$$

$$x_1 \geq 0 \quad \lambda_k \geq 0. \quad (58)$$

Si  $\Pi^{K+1}$  est le vecteur dual des contraintes (56) du problème et  $x_2^{K+1}$  est la solution de MARKAL-DEMANDE qui lui est associé, il est possible d'augmenter le problème (54) – (58) du nouveau vecteur  $(c_2 x_2^{K+1}, A_{22} x_2^{K+1}; 1)$  et de continuer ainsi la procédure.

D'autres modifications de MARKAL-PRODUCTION peuvent être envisagées pour réaliser le couplage. Shapiro et White [1982] appliquent au National Coal model (ICF [1976]) une procédure de décomposition pouvant se transposer naturellement à notre problème. Considérons un nouveau MARKAL-PRODUCTION modifié, écrit comme

$$\text{Min } c_1 x_1 + \varphi(y) \quad (59)$$

$$\text{s.c.q.} \quad A_{11} x_1 = b_1 \quad (60)$$

$$A_{21} x_1 - y = 0 \quad (61)$$

$$x_1 \geq 0. \quad (62)$$

Ce problème est équivalent à MARKAL si  $\varphi(y)$  est défini comme

$$\varphi(y) \equiv \text{Min } c_2 x_2 \quad (63)$$

$$\text{s.c.q.} \quad A_{22} x_2 = b_2 - y \quad (64)$$

$$A_{32} x_2 = b_3 \quad (65)$$

$$x_2 \geq 0. \quad (66)$$

$\varphi(y)$  est une fonction polyédrale qu'il est possible de représenter par l'ensemble de ses plans supports soit

$$\text{Max}_t \Pi^t(b_2 - y) + v^t b_3 \quad (67)$$

où  $(\Pi^t, v^t)$  sont les variables duales associées au MARKAL-DEMANDE ((64) – (65) – (66)). Le couplage entre les deux modèles s'établit comme suit. Considérons le MARKAL-PRODUCTION modifié

$$\text{Min } c_1 x_1 + \xi \quad (68)$$

$$\text{s.c.q.} \quad A_{11} x_1 = b_1 \quad (69)$$

$$A_{21} x_1 - y = 0 \quad (70)$$

$$\xi + \Pi^k y \geq \Pi^k b_2 + v^k b_3 \quad k = 1 \dots K \quad (71)$$

où  $\{(\Pi^k, v^k), k = 1, \dots, K\}$  sont les variables duales obtenues au cours des cycles précédents de l'algorithme. Soit  $y^{K+1}$  la valeur de  $y$  dans la solution de ce dernier problème. On résoud le MARKAL-DEMANDE suivant

$$\text{Min } c_2 x_2 \quad (72)$$

$$\text{s.c.q.} \quad A_{22} x_2 = b_2 - y^{K+1} \quad (73)$$

$$A_{32} x_2 = b_3 \quad (74)$$

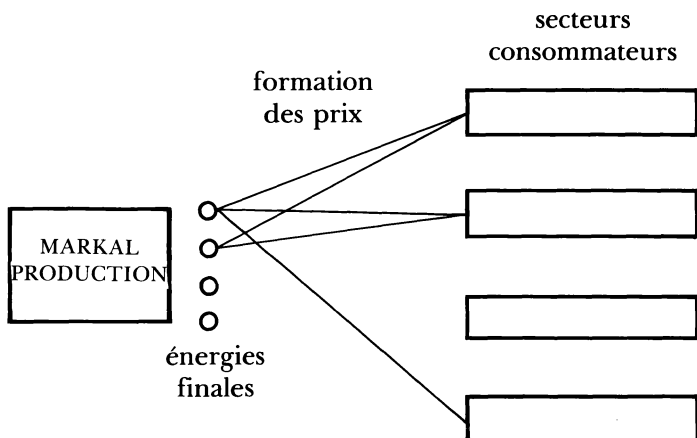
$$x_2 \geq 0, \quad (75)$$

dont la solution fournit un nouveau vecteur  $(\Pi^{K+1}, v^{K+1})$  permettant de mettre à jour MARKAL-PRODUCTION pour un nouveau cycle.

Si l'approche précédente est parfaitement valable en principe, elle ne semble guère attrayante en pratique dans le cas du couplage entre MARKAL-DEMANDE et PRODUCTION. Outre la nécessité d'ajouter des lignes dans MARKAL-PRODUCTION (une opération peu naturelle à cause de l'organisation en colonnes des données d'un programme linéaire), elle requiert de traiter un MARKAL-DEMANDE non décomposable : les ressources globales portent en effet sur l'ensemble des secteurs consommateurs qui se trouvent ainsi couplés entre eux.

Les méthodes discutées jusqu'à présent s'appliquent essentiellement à des systèmes où la demande est fonction de prix égaux aux coûts marginaux. Beaucoup de marchés énergétiques ne satisfont pas à cette condition : il en est en particulier ainsi lorsque les prix incluent des taxes ou sont calculés comme des moyennes (Murphy et al [1981]). Un autre cas intéressant est celui où il existe des rigidités sur les prix. Ces circonstances apparaissent dans la tarification du gaz et de l'électricité. Greenberg et Murphy ont abordé le problème dans le cadre d'une modification de l'algorithme du PIES ; comme pour ce dernier, on suppose que le système de demande est continûment différentiable. Des hypothèses supplémentaires (négligées ici) doivent également être imposées au système d'offre pour garantir la convergence.

**FIGURE 5**  
**FORMATION DE PRIX DIFFÉRENTS DES COÛTS MARGINAUX**



Nous supposons que le secteur de production représenté dans MARKAL-PRODUCTION n'est pas régulé et que seule la formation des prix aux secteurs consommateurs fait l'objet de distorsions par rapport au coût marginal. Cette situation est représentée schématiquement à la figure 5, où apparaissent le découplage des différents secteurs consommateurs et des arcs illustrant les mécanismes de formation des prix. Le principe de la modification du PIES proposée par Greenberg et Murphy est d'imposer à ces arcs des coûts de transport correspondant aux différences entre le coût marginal et le prix réel affiché au secteur consommateur. En introduction à la discussion, considérons le modèle défini comme suit. Soit  $I$  l'ensemble des composantes de  $y$  :  $y_i$  est la quantité du vecteur énergétique  $i$  délivrée par MARKAL-PRODUCTION,  $y_i$  est réparti entre les différents secteurs consommateurs ; soit  $y_{ij}$  la quantité du combustible  $i$  livrée au secteur  $j$  et  $t_{ij}$  le « coût de transport » unitaire sur l'arc  $(i,j)$ . Nous supposons que chacun des secteurs consommateurs a un système de demande intégrable  $y_j(P_j)$  où  $P_j$  est le prix des vecteurs énergétiques pour le secteur  $j$  ; le problème

$$\text{Min } c_1 x_1 + \sum_{(i,j)} t_{ij} y_{ij} - \sum_j U_j(y_j) \quad (76)$$

$$\text{s.c.q.} \quad A_{11} x_1 = b_1 \quad (77)$$

$$A_{21} x_1 - y = 0 \quad (78)$$

$$\sum_j y_{ij} = y_i \quad (79)$$

simule un équilibre concurrentiel entre le secteur producteur d'énergie et les secteurs de demande lorsque la livraison de l'énergie est affectée d'un coût unitaire supplémentaire  $t_{ij}$ . Si  $\Pi_i$  désigne le coût marginal du combustible  $i$  à la production, on a dans ce cas

$$P_{ij} = \Pi_i + t_{ij} \quad (80)$$

et  $t_{ij}$  représente donc la différence entre le coût marginal du combustible et le prix affiché pour le consommateur  $j$ . Le principe de l'approche de Greenberg et de Murphy est de faire jouer à  $t_{ij}$  le rôle d'une différence entre le coût marginal et le prix au consommateur tel qu'établi par un principe de tarification. Pour en illustrer l'application, supposons que la règle de tarification puisse se représenter par une correspondance

$$p(\Pi, x_1) \quad (81)$$

et considérons  $(\tilde{\Pi}, \tilde{x}_1)$  un vecteur de solutions primale et duale du MARKAL-PRODUCTION modifié ((76) – (77) – (78) – (79)). On définit un nouveau modèle transformé en posant

$$\tilde{t}_{ij} = p_{ij}(\tilde{\Pi}, \tilde{x}_1) - \tilde{\Pi}_i \quad (82)$$

qui est la différence entre le prix calculé par le principe de tarification et le coût marginal. Des résultats de convergence ainsi que des discussions de circonstances ayant mené à des cyclages sont disponibles.

Il est évidemment toujours possible d'utiliser un algorithme en dehors des circonstances pour lesquelles sa convergence est prouvée ; le prix à payer est l'absence de garantie quant au résultat trouvé. Cette démarche semble la seule possible lorsque le système de demande est dérivé d'un modèle de simulation comme MEDEE (IEJE [1982]). Des notions importantes pour le couplage comme les variables duales perdent alors toute signification et la seule procédure utilisable dans ce cas semble être l'extension du PIES telle que proposée par Greenberg et Murphy.

#### 4. DÉVELOPPEMENTS DE MARKAL-ÉCONOMIE

Le modèle MARKAL-ÉCONOMIE résulte d'un couplage entre MARKAL-PRODUCTION et un modèle multisectoriel de l'économie. Nous oublierons dans cette section les composants du modèle intégré pour considérer celui-ci comme un tout dont certaines parties (énergétiques) ont fait l'objet d'un développement particulier. Plusieurs critiques peuvent être faites au modèle ainsi défini qu'il est possible de lever par des considérations techniques supplémentaires. Nous considérons pour la suite de cette section que le modèle MARKAL-ÉCONOMIE est représenté comme suit

$$\text{Max } U(x) \quad (83)$$

$$\text{s.c.q. } x - By \leq b \quad (84)$$

où  $U(x)$  est une fonction d'utilité dérivée d'un système de demande  
 $B$  est la matrice de production de l'économie.

Ce modèle peut faire l'objet de différentes généralisations ; nous discuterons ici la représentation de substitutions dans les secteurs industriels et la prise en compte de plusieurs agents pour représenter la consommation finale.

#### A) Introduction de coefficients techniques variables

MARKAL-ÉCONOMIE divise l'économie en deux parties : les secteurs énergétiques font l'objet d'une description détaillée de leurs activités, le reste de l'économie est représenté par une colonne pour chaque secteur non énergétique. Cette dernière modélisation ne permet pas de représenter les changements pouvant apparaître, en réponse aux prix, dans la structure de la consommation des secteurs et il est intéressant d'examiner dans quelle mesure des modèles économétriques de demande industrielle peuvent être utilisés pour remédier à cette situation.

Soit  $(y_1, y_2)$  une partition du vecteur  $y$  en ses composantes énergétiques (qui font l'objet d'une description détaillée) et non énergétique (pour lesquelles la représentation consiste en un vecteur à coefficients fixes par secteur). Nous récrivons le modèle comme

$$\text{Max } U(x) \quad (85)$$

$$\text{s.c.q. } x - B_1 y_1 - \sum_j B_{2j} y_{2j} \leq b \quad (86)$$

$$B_{2j} \in S_{2j} \quad (87)$$

$$x, y_1, y_2 \geq 0 \quad (88)$$

où  $S_{2j}$  est un ensemble convexe qui représente les possibilités de substitution des inputs du secteur  $j$  décrites par le modèle économétrique de celui-ci ( $S_{2j}$  est l'ensemble de production décrit par la fonction de production du secteur). Le modèle ((85) – (86) – (87) – (88)) ainsi formulé inclut alors une représentation des substitutions dans les secteurs énergétiques et non énergétiques.

La résolution du modèle peut se faire aisément en recourant à une procédure de construction de colonnes (Dantzig [1963]). Si  $\{B_{2j}^k ; k = 1 \dots K_j\}$  est un ensemble de propositions correspondant à des structures de demandes du secteur  $j$ , on définit le maître problème suivant :

$$\text{Max } U(x) \quad (89)$$

$$\text{s.c.q. } x - B_1 y_1 - \sum_j \sum_{k=1}^K B_{2j}^k y_{2j}^k \leq b \quad (90)$$

$$y_1 \geq 0 \quad y_{2j}^k \geq 0 \quad (91)$$

où  $\Pi$  est le vecteur des variables duales à l'optimum du problème. Toute restructuration du secteur  $j$  correspond à un choix de la colonne  $B_{2j}$  dans  $S_{2j}$ ; celle-ci est profitable si

$$\text{Max } \Pi B_{2j} \quad (92)$$

$$\text{s.c.q.} \quad B_{2j} \in S_{2j} \quad (93)$$

est positif. Supposons que tous les secteurs aient été examinés et soit  $B_{2j}^{K_j+1}$  les colonnes profitables ainsi trouvées; on peut alors construire un nouveau maître problème pour continuer la procédure.

#### B) *Prise en compte de plusieurs agents consommateurs pour la demande finale*

La modification la plus importante à apporter au modèle vient certes de la prise en compte de plusieurs agents consommateurs et d'une règle de répartition du revenu. Ce besoin se présente naturellement si on veut prendre en compte l'existence de plusieurs catégories d'agents consommateurs (ce qui est l'interprétation la plus habituelle du problème), des comportements d'épargne (Boucher, Erlich, Ginsburgh et Smeers [1985]) ou une contrainte de balance de paiements avec fonction de demande du pays et / ou du reste du monde (Ginsburgh et Waelbroeck [1981]). On peut aussi être amené à introduire artificiellement des agents consommateurs supplémentaires pour des raisons techniques comme la modélisation d'effets d'horizon ou d'imperfections de marché, comme des rigidités de prix (Ginsburgh et Van der Heyden [1983]).

Plusieurs techniques ont été proposées qui résolvent les problèmes d'équilibre à l'aide de programmes mathématiques. Celles-ci n'ayant rien qui soit particulièrement lié à la modélisation énergétique, nous nous contenterons d'en donner un bref aperçu, renvoyant le lecteur à la littérature spécialisée.

Considérons comme exemple particulier le cas de la balance des paiements. Si  $(u, v)$  désigne le vecteur des importations et exportations du pays, le système des relations de conservation de matière s'écrit

$$x + v - u - By \leq b. \quad (94)$$

Le modèle comporte deux agents, le pays et le reste du monde, qui maximisent leur utilité sous une contrainte budgétaire: si  $\Pi$  est un système de prix, la consommation  $x$  du pays satisfait

$$\text{Max } U(x) \quad (95)$$

$$\text{s.c.q.} \quad \Pi x \leq \Pi b \quad (96)$$

$$x \geq 0. \quad (97)$$



De la même manière, le reste du monde choisit un vecteur  $(u, v)$  qui maximise une utilité  $V(u, v)$

$$\text{Max } V(u, v) \quad (98)$$

$$\text{s.c.q.} \quad \Pi u - \Pi v \geq 0 \quad (99)$$

$$u \geq 0 \quad v \geq 0. \quad (100)$$

Enfin le système de production est en équilibre, soit

$$\Pi(b - x - v + u + By) = 0. \quad (101)$$

Plusieurs méthodes recourent à la programmation mathématique permettant de résoudre ce problème. Ginsburgh et Waelbroeck [1981] proposent une approche par tâtonnement où le problème initial est remplacé par une suite de programmes d'optimisation

$$\text{Max } U(x) + \alpha V(u, v) \quad (102)$$

$$\text{s.c.q.} \quad x + u - v - By \leq b \quad (103)$$

$$x, u, v, y \geq 0. \quad (104)$$

Si  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  est le vecteur des imports-exports à la solution optimale, et  $\tilde{\Pi}$  le vecteur dual correspondant, l'algorithme de tâtonnement ajuste  $\alpha$  à la hausse si  $\Pi(\tilde{u} - \tilde{v})$  est positif et à la baisse autrement. La convergence est obtenue lorsque le solde est nul.

La méthode de Manne-Chao-Wilson [1980] considère les deux ensembles

$$\{(U, V) \mid U = U(x) ; V = V(u, v) \text{ et } x + u - v - By \leq b\} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} \{(U', V') \mid U' = \max [U(x) \mid \Pi x \leq \Pi b] ; V' \\ = \max [V(u, v) \mid \Pi(u - v) \geq 0]\} \end{aligned} \quad (106)$$

qu'elle essaye de séparer par un hyperplan. La méthode recourt à la génération de colonnes (Dantzig [1963]). Enfin, la méthode par successions de problèmes complémentaires linéaires considère la fonction de demande  $x(\Pi)$ ,  $u(\Pi)$  et  $v(\Pi)$  solution des problèmes d'optimisation représentant le comportement des agents et pose le problème complémentaire non linéaire :

Trouver  $(\Pi, y)$  tel que

$$x(\Pi) + u(\Pi) - v(\Pi) - By \leq b \quad (107)$$

$$\Pi [b - x(\Pi) - u(\Pi) + v(\Pi) + By] = 0. \quad (108)$$

Ce problème est traité par une suite de programmes complémentaires linéaires.

## 5. CONCLUSION

Si l'écriture pure et simple d'un modèle énergétique comme programme linéaire apparaît souvent limitée, les outils de base de la programmation mathématique peuvent être considérés comme une pierre angulaire de modèles beaucoup plus satisfaisants d'un point de vue économique. Ainsi, un système intégré, combinaison d'un modèle de flux énergétiques et d'une représentation « input-output » de l'économie, peut déjà être réalisé dans le cadre strict de la programmation linéaire. D'autres couplages se basent essentiellement sur les techniques de génération de colonnes et sur la résolution d'une suite de programmes mathématiques. Seules quelques méthodes plus récentes font appel à la solution d'une suite de problèmes complémentaires mais, pour elles aussi, les liens avec la programmation linéaire sont étroits. La réalisation de ce genre d'outils s'est, jusqu'à présent, limitée à des cas d'espèces. Une mise en oeuvre plus formalisée et plus systématique constituerait sans doute un apport significatif à une pénétration plus profonde de la programmation mathématique dans la modélisation économique.

## BIBLIOGRAPHIE

- (1) ABILOCK, H., C. BERGSTRÖM, J. BRADY, A. DOERNBERG, A. EK, L. FISHBONE, D. HILL, M. HIRANO, R. KAVANAGH, S. KOYAMA, K. LARSSON, G. LEMAN, P. LOVE, M. MOY, V. SAILOR, O. SATO, F. SHORE, T. SIRA, T. TEICHMANN and C.O. WENE, « MARKAL. A multiperiod linear programming model for energy systems analysis », in *Energy Systems Analysis*, R. Kavanagh (éd.), D. Reidel, 1980.
- (2) AHN, B., *Computation of Market Equilibria for Policy Analysis*, Garland, New York, 1979.
- (3) BOUCHER, J., Z. ERLICH, V. GINSBURGH, Y. SMEERS, « End effects and implicit discount rate in infinite horizon competitive equilibria », 1985.
- (4) DANIEL, T.E., H.M., GOLDBERG, « Dynamic equilibrium energy modeling: the Canadian balance model », *Operations Research*, 29(5), 1981.
- (5) DANTZIG, G.B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.
- (6) DOE, « The integrating model of the project independence evaluation system », U.S. Department of Commerce, National Technical Information Service, 1979.
- (7) GINSBURGH, V., J.L. WAELEBROECK, *Activity Analysis and General Equilibrium Modelling*, North-Holland, Amsterdam, 1981.
- (8) GINSBURGH, V., L. VAN DER HEYDEN, « Equilibrium with government intervention policies: the single consumer case », Centre d'Économie Mathématique et d'Économétrie, Université Libre de Bruxelles, 1983.
- (9) GREENBERG, H.J., F.H. MURPHY, « Computing regulated market equilibria with mathematical programming ».
- (10) ICF, INC., *The National Coal Model: Description and Documentation*, Washington DC., 1976.
- (11) IEA, « World energy outlook », International Energy Agency, Paris, 1982.
- (12) IEA ETSAP, « Energy after the eighties: a project report », à paraître en 1984.
- (13) IEJE, « Le modèle MEDEE 3 », Institut Économique et Juridique de l'Énergie, Université des Sciences Sociales de Grenoble, novembre 1982.
- (14) KENNEDY, M., « An economic model of the world oil market », *Bell Journal of Economics, Management Science*, 5(2), 1974.
- (15) MANNE, A.S., « ETA: a model for energy technology assessment », *Bell Journal of Economics*, 7(2), 1976.

- (16) MANNE, A.S., H.P. CHAO, R. WILSON, « Computation of competitive equilibria by a sequence of linear programs », *Econometrica*, 48(4), 1980.
- (17) MASSÉ, P. AND M. GIBRAT, « Application of linear programming to investments in the electric power industry », *Management Science*, 3(2), 1957.
- (18) MURPHY, F.H., S. SANDERS, S.H. SHAW ET R. THRASHER, « Modeling natural gas regulatory proposals using the project independence evaluation system », *Operations Research*, 29, 1981.
- (19) O'NEILL, A.P., M. WILLIARD, B. WILKINS, R. PIKE, « A mathematical programming model for allocation of natural gas », *Operations Research*, 17(5), 1979.
- (20) ORCHARD-HAYS, W., « History of mathematical programming systems », in *Design and Implementation of Optimization Software*, H. Greenberg (ed.), Sijthoff and Noordhoff, 1978.
- (21) PRECKEL, P., « Intertemporal equilibrium models : development and results », Ph.D. Dissertation, Stanford, 1983.
- (22) SHAPIRO, J.F., D.E. WHITE, « A hybrid decomposition method for integrating coal supply and demand models », *Operations Research*, 30(5), 1982.
- (23) VAN DER VOORT, « The EFOM 12C energy supply model within EC modelling system. OMEGA », *The International Journal of Management Science*, 10(5), 1982.
- (24) WAGNER, M.H., « Supply-demand decomposition of the national coal model », *Operations Research*, 29(6), 1981.